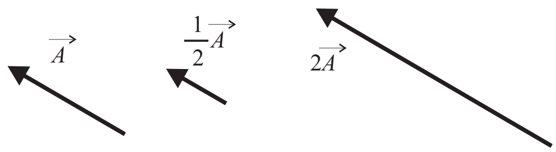
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Física

Física I -2009/2010

1ª Série - Vectores - Resolução

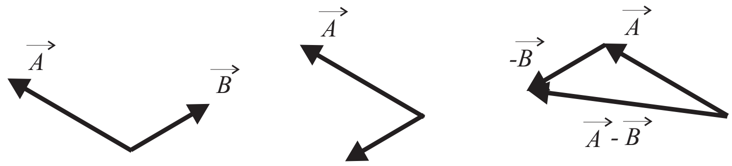
Questões:

Q1 - Dado o vector $\vec{A}$ da figura seguinte, desenhe os vectores $\frac{1}{2}\vec{A}$ e $2\vec{A}$.



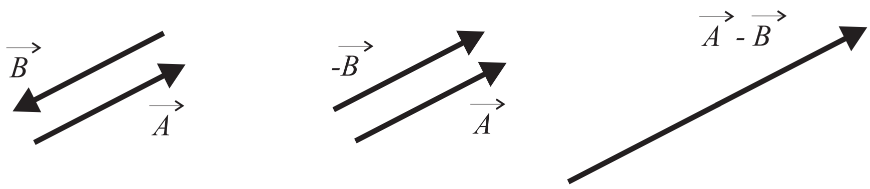
Q2 - Para cada um dos pares de vectores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ seguintes, obtenha graficamente o vector diferença $\vec{A} - \vec{B}$

a)

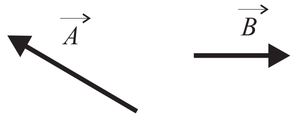


b)

c)

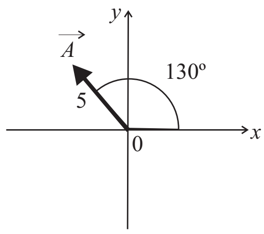


Q3 - Dados os vectores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ seguintes, obtenha graficamente o vector $\vec{C} = 2\vec{A} - 3\vec{B}$.



Q4 - Obtenha os valores numéricos das componentes (escalares), segundo os eixos dos x e dos y, de cada um dos vectores indicados.

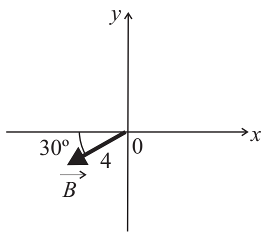
a)



As componentes escalares do vector $\vec{A}$ são:

$$\begin{aligned} A_x &= 5\cos 130^\circ = 5 \times (-0.64) = -3.2 \\ A_y &= 5\sin 130^\circ = 3.8 \end{aligned}$$

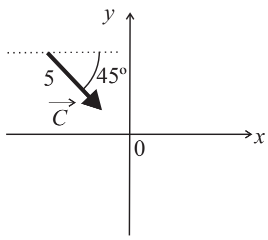
b)



As componentes escalares do vector $\vec{B}$ são:

$$\begin{aligned} B_x &= 4\cos 210^\circ = -4\cos 30^\circ = -3.5 \\ B_y &= 4\sin 210^\circ = -4\sin 30^\circ = 2.0 \end{aligned}$$

c)



As componentes escalares do vector $\vec{C}$ são:

$$\begin{aligned} C_x &= 5\cos(-45^\circ) = 3.5 \\ C_y &= 5\sin(-45^\circ) = -3.5 \end{aligned}$$

Q5 - Quais são as componentes, segundo os eixos dos x e dos y, do vector soma $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ dos três vectores referidos na questão Q4?

Resolução:

A componente segundo um eixo do vector soma de vários vectores é a somas das componentes segundo esse eixo desses vectores.

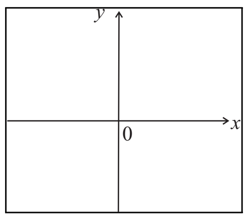
$$\begin{aligned} D_x &= A_x + B_x + C_x = -3.2 - 3.5 + 3.5 = -3.2 \\ D_y &= A_y + B_y + C_y = 3.8 + 2.0 - 3.5 = 2.3 \end{aligned}$$

Q6 - Um vector pode ter uma componente nula e módulo não nulo? Justifique.

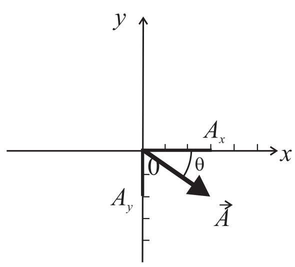
Q7 - Um vector pode ter módulo nulo e uma componente não nula? Justifique.

Q8 - Para cada vector cujas componentes segundo os eixos dos x e dos y são indicadas:

- **Desenhe o vector utilizando o sistema de eixos apresentado;**
- **Indique o ângulo θ que define a direcção e sentido do vector;**
- **Obtenha o módulo do vector e o valor de θ.**



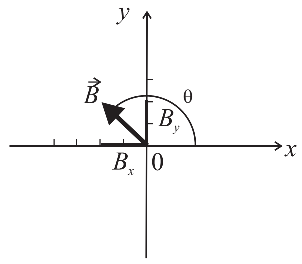
a) $A_x = 3$, $A_y = -2$;



O módulo de $\vec{A}$ é

$$\begin{aligned} \left|\vec{A}\right| &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{9+4} = 3.6 \\ \theta &= \arctan\frac{-2}{3} = -0.588\,\mathrm{rad} = \frac{-0.588\,\mathrm{rad}}{2\pi\,\mathrm{rad}} \times 360\,^\circ = -33.7\,^\circ \end{aligned}$$

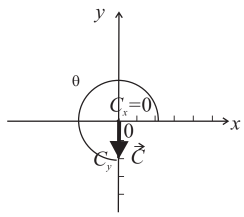
b) $B_x = -2$**;** $B_y = 2$**;**



O módulo de $\vec{B}$ é

$$\begin{aligned} \left|\vec{B}\right| &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{4+4} = 2.8 \\ \theta &= 90^\circ + \arctan\frac{2}{2} = 135^\circ \end{aligned}$$

c) C_x= 0**;** $C_y = -2$**.**

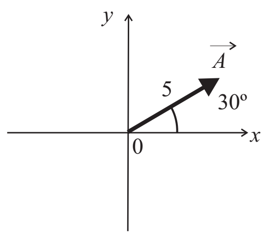


O módulo de $\vec{C}$ é

$$\begin{aligned} \left|\vec{C}\right| &= \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{0+4} = 2 \\ \theta &= 270^\circ = -90^\circ \end{aligned}$$

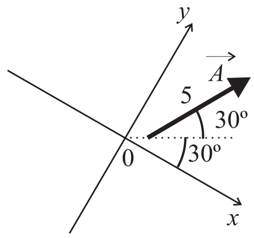
Q9 - Dado o vector $\vec{A} = (5,$ 30^o acima da horizontal), obtenha as componentes A_x e A_y nos três sistemas de coordenadas indicados abaixo.

a)



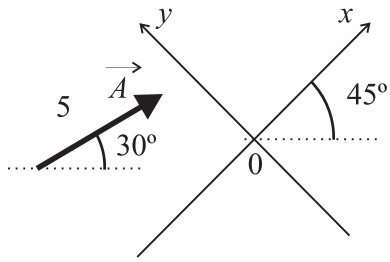
$$\begin{aligned} A_x &= 5\cos 30^\circ = 4.3 \\ A_y &= 5\sin 30^\circ = 2.5 \end{aligned}$$

b)



$$\begin{aligned} A_x &= 5\cos\left(30^\circ + 30^\circ\right) = 2.5 \\ A_y &= 5\sin\left(30^\circ + 30^\circ\right) =: 4.3 \end{aligned}$$

c)



$$\begin{aligned} A_x &= 5\cos\left(30^\circ - 45^\circ\right) = 4.8 \\ A_y &= 5\sin\left(30^\circ - 45^\circ\right) = -1.3 \end{aligned}$$

Problemas:

Nestes problemas, os vectores unitários que definem a direcção e sentido dos eixos coordenados x, y, z são denominados, respectivamente, por $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

P1 - Calcule:

a) O módulo do vector $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$;

$$|\,\vec{a}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

b) O vector unitário com a direcção e sentido de $\vec{a}$ (Dado um vector $\vec{a}$, o vector unitário com a direcção e sentido de $\vec{a}$, que poderemos denotar por $\widehat{a}$, denomina-se versor de $\vec{a}$)

$$\widehat{a} = \frac{\vec{a}}{|\,\vec{a}|} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

P2 - Dados os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, cujas componentes segundo os eixos coordenados x, y e z são, respectivamente,

$$\begin{aligned} a_x &= 5;\ a_y = 4;\ a_z = -3; \\ b_x &= 3;\ b_y = -4;\ b_z = 5, \end{aligned}$$

determine:

a) O vector $\vec{c} = 6\vec{a} - 3\vec{b}$;

Os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 5\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k} \\ \vec{b} &= 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \vec{c} &= 6\vec{a} - 3\vec{b} = (30-9)\,\vec{i} + (24+12)\,\vec{j} + (-18-15)\,\vec{k} \\ &= 21\vec{i} + 36\vec{j} - 33\vec{k}. \end{aligned}$$

b) A quantidade $\vec{a}^2 + \vec{b}^2$;

Dado um vector $\vec{v}$, podemos definir o produto interno ou escalar do vector $\vec{v}$ por si própio com sendo $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \vec{a}^2 + \vec{b}^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= 25 + 16 + 9 + 9 + 16 + 25 \\ &= 100. \end{aligned}$$

c) O ângulo entre os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$;

O produto interno dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ pode ser escrito na forma $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\theta$, em que θ é o ângulo entre as direcções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e pode ser escrito também na forma $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. Consequentemente,

$$|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

e

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} \\ &= \frac{5\times 3 - 4\times 4 - 3\times 5}{\sqrt{25+16+9}\sqrt{9+16+25}} \\ &= -0.32\end{aligned}$$

: -16.0 O ângulo θ é, então,

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos(-0.32) \\ &= 1.8965\,\mathrm{rad} = 108.7\,^\circ\end{aligned}$$

d) A projecção de $\vec{b}$ segundo $\vec{a}$.

O vector que resulta da projecção de $\vec{b}$ segundo $\vec{a}$ é um vector com módulo $\left|\vec{b}\right|\cos\theta$ e a direcção e sentido do vector $\vec{a}$, ou seja, é o vector

$$\begin{aligned}\left|\vec{b}\right|\cos\theta\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} &= \left|\vec{b}\right|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|} \\ &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2} = -\frac{16\left(5\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}\right)}{50} \\ &= -1.6\vec{i} - 1.28\vec{j} + 0.96\vec{k}.\end{aligned}$$

P3 - Dados os pontos $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$, escreva a expressão cartesiana (isto é, em termos dos vectores unitários segundo os eixos dos x, y, z) do vector $\overrightarrow{PQ}$ e e obtenha a expressão do seu módulo.

O vector $\overrightarrow{PQ}$ tem origem no ponto $P(x_1, y_1, z_1)$ e extremidade no ponto $Q(x_2, y_2, z_2)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \\ &= (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} + (z_2 - z_1)\,\vec{k}.\end{aligned}$$

O módulo deste vector é

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

P4 $-$Considere os dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, no plano $x0y$, possuindo, respectivamente, os módulos $\sqrt{3}$ e 1. O vector $\vec{u}$ faz com o semi-eixo $0x$ um ângulo de 30^o e o vector $\vec{v}$ faz com esse semi-eixo um ângulo de 60^o. Calcule:

a) As componentes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, segundo os eixos dos x, y, z;

b) As componentes da resultante da adição de $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

c) O módulo dessa resultante;

d) As componentes do vector diferença $\vec{u} - \vec{v}$;

e) O módulo do vector $\vec{u} - \vec{v}$;

f) O produto interno $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

R: a) $u_x = 1.5$**;** $u_y = 0.87$**;** $u_z = 0$**;** $v_x = 0.5$**;** $v_y = 0.87$**;** $v_z = 0$**; b) 2, 1.74, 0; c) 2.65; d) 1, 0, 0; e) 1; f) 1.5.**

P5 - Calcule o módulo do vector $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, em que $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ são os vectores abaixo indicados, e o ângulo que o vector $\vec{r}$ faz com o semi-eixo positivo dos x.

$\tilde{\mathbf{a}} \equiv (37; 30°)$
$\tilde{\mathbf{b}} \equiv (25; 60°)$
$\tilde{\mathbf{c}} \equiv (30; 135°)$.

Aqui os vectores são denotados por $(|\vec{v}|, \theta)$, em que $|\vec{v}|$ representa a amplitude do vector e θ representa o ângulo que o vector faz com o semi-eixo positivo dos x.

Como só nos é fornecido um coseno director, o vector está no plano definido pelo eixo dos x e um dos outros eixos coordenados cartesianos. Seja este eixo o eixo y. Podemos calcular as componentes escalares de cada um dos vectores segundo os eixos dos x e dos y:

$$\begin{aligned} a_x &= 37 \cos 30\,° = 32.0 \\ a_y &= 37 \sin 30\,° = 18.5 \\ b_x &= 25 \cos 60\,° = 12.5 \\ b_y &= 25 \sin 60\,° = 21.7 \\ c_x &= 30 \cos 135\,° = -21.2 \\ c_y &= 30 \sin 135\,° = 21.2 \end{aligned}$$

Obtemos as componentes do vector $\vec{r}$, adicionando as componentes dos vectores-parcelas, segundo cada um dos eixos coordenados, ou seja,

$$\begin{aligned} r_x &= a_x + b_x + c_x = 32.0 + 12.5 - 21.2 = 23.3 \\ r_y &= a_y + b_y + c_y = 18.5 + 21.7 + 21.2 = 61.4 \end{aligned}$$

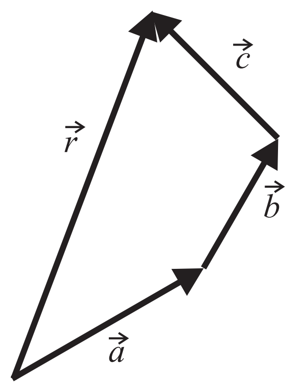
O módulo de $\vec{r}$ é, então,

$$|\vec{r}| = \sqrt{23.3^2 + 61.4^2} = 66,$$

enquanto que o ângulo que o vector $\vec{r}$ faz com o eixo dos x é

$$\theta = \arctan \frac{r_y}{r_x} = \arctan \frac{61.4}{23.3} = 69.2\,°$$

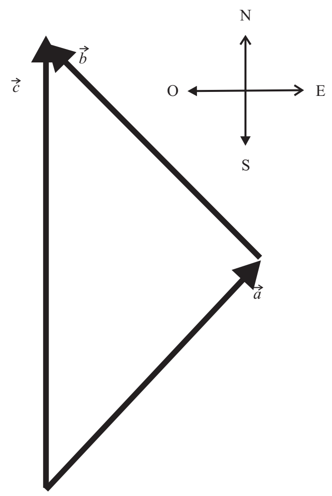
O cálculo da função arctan dá-nos, na calculadora, sempre um ângulo no 1.^{o} ou no 4.^{o} quadrante (conforme o argumento seja positivo ou negativo). Para nos certificarmos do quadarnte em que tá o ângulo que pretendemos devemos verificar as componentes escalares do vector. No nosso caso, ambas são positivas, o que revela que o ângulo se encontra no 1.^{o} quadrante e portante tem o valor dado directamente pela calculadora.



P6 - Decomponha um deslocamento de 80 km numa direcção 60^o para sul da direcção Este em dois vectores, um dos quais na direcção Este.

R: $\vec{a} = \left(40\vec{i}\right)$ **km;** $\vec{b} = \left(-69\vec{j}\right)$**km., em que** $\vec{i}$ **aponta para Este e** $\vec{j}$ **aponta para Norte.**

P7 - Um barco parte do seu porto, tendo-se deslocado de 160 km para norte do ponto de partida. Decomponha o deslocamento do barco em dois vectores componentes, um dirigido para nordeste e o outro para noroeste. Que distância teria o barco percorrido a mais para atingir a sua posição final, se viajasse primeiramente para nordeste e depois para noroeste?



Os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, na figura, constituem os lados de um triângulo rectângulo. Consequentemente $|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2}$. Como $\left|\vec{b}\right| = |\vec{a}|$, resulta imediatamente

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{c}|}{\sqrt{2}} = \frac{160\,\text{km}}{\sqrt{2}} = 113.1\,\text{km}.$$

A distância que o barco teria percorrido a mais é

$$\begin{aligned} L &= 2 \times 113.1\,\text{km} - 160\,\text{km} \\ &= 66.2\,\text{km} \end{aligned}$$